

Μάθημα: **Στατική Ι**  
 Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

15 Φεβρουαρίου 2012  
 Διάρκεια εξέτασης 2:20

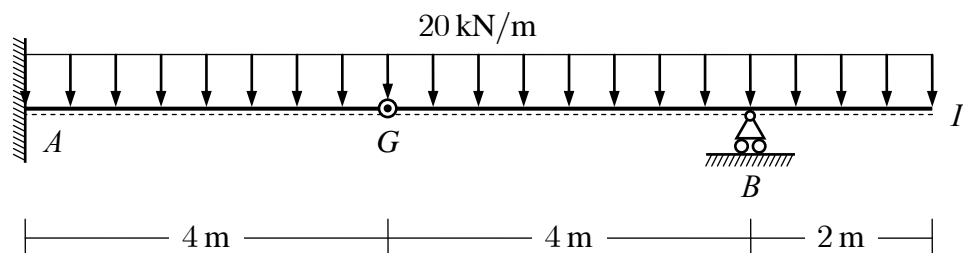
## ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

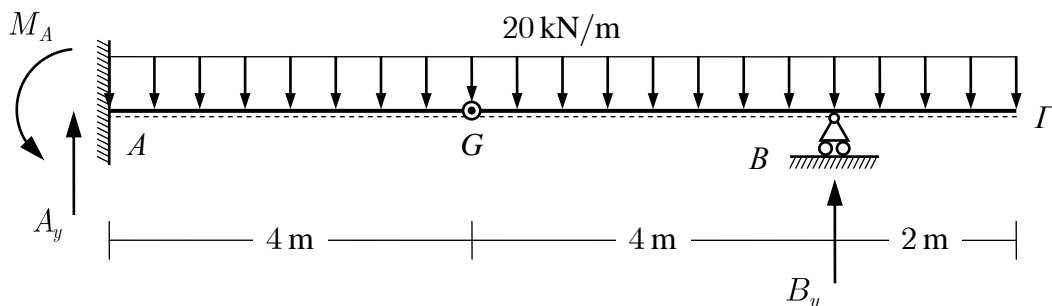
(1<sup>η</sup> περίοδος χειμερινού εξαμήνου 2011-12)

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (20%)

Για τη δοκό Gerber του παρακάτω σχήματος, να σχεδιασθεί το διάγραμμα καμπτικών ροπών και να προσδιορισθεί η θέση και η τιμή της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης.



#### Λύση:



Προσδιορισμός της αντίδρασης στη κύλιση B:

$$\curvearrowright \Sigma M_G^{\text{δεξιά}} = 0 \Rightarrow 4 \text{ m} \cdot B - (20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow \boxed{B = 90 \text{ kN}}$$

Προσδιορισμός των αντιδράσεων στη πάλκτωση από την ισορροπία της δοκού ΑΓ:

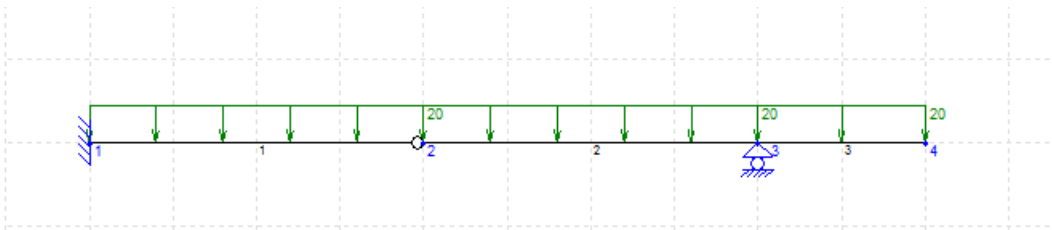
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - (20 \text{ kN/m} \cdot 10 \text{ m}) \cdot 5 \text{ m} + 8 \text{ m} \cdot B_y = 0$$

$$\Rightarrow M_A - 1000 \text{ kNm} + 8 \text{ m} \cdot 90 \text{ kN} = 0$$

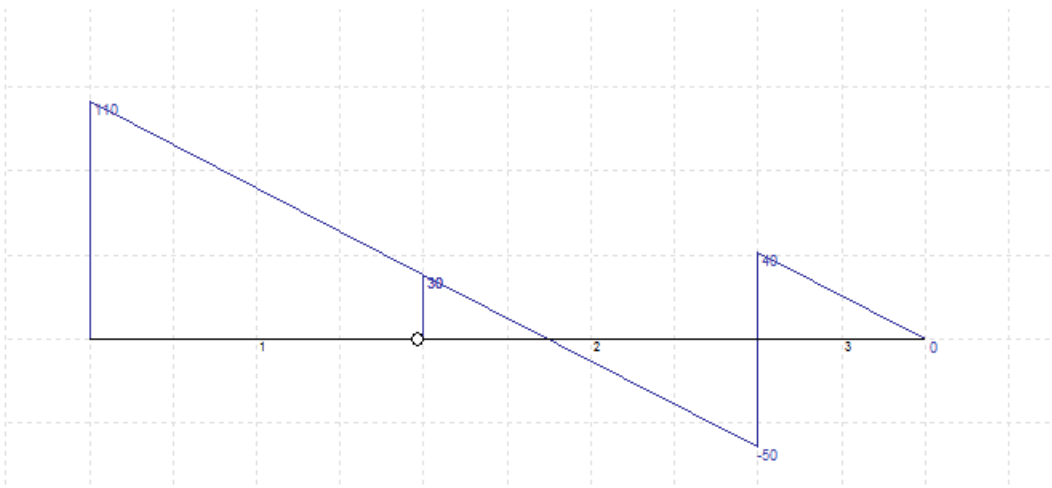
$$\Rightarrow M_A - 1000 \text{ kNm} + 720 \text{ kNm} = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 280 \text{ kNm}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 20 \text{ kN/m} \cdot 10 \text{ m} + B_y = 0$$

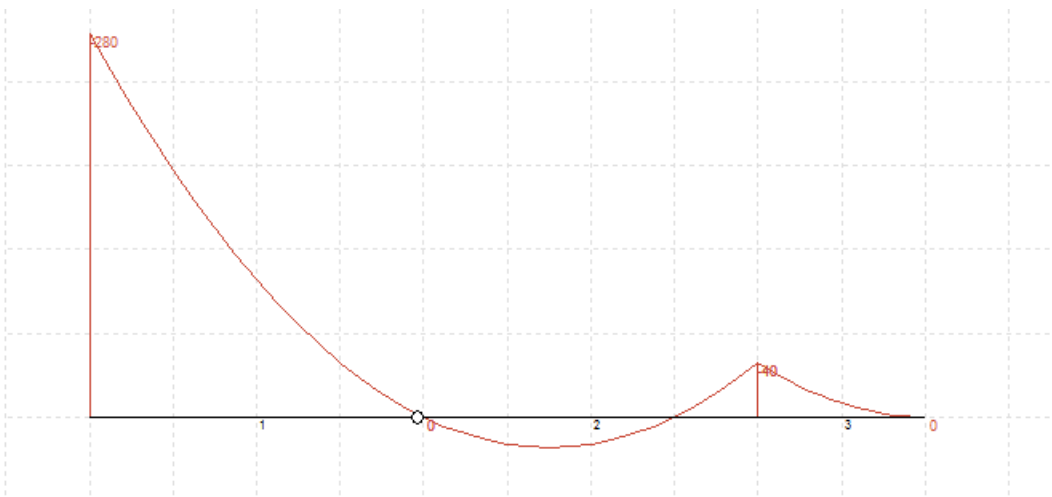
$$\Rightarrow A_y - 200 \text{ kN} + 90 \text{ kN} = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 110 \text{ kN}}$$



### Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων



### Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών



Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Η μέγιστη ροπή θα εμφανισθεί δεξιά της πάκτωσης  $A$  σε σημείο κάτω από το καταναεμημένο φορτίο όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Η απόσταση του  $x$  από το  $A$  δίνεται από τη σχέση:

$$x = \frac{110 \text{ kN}}{20 \text{ kN/m}} = 5.5 \text{ m}$$

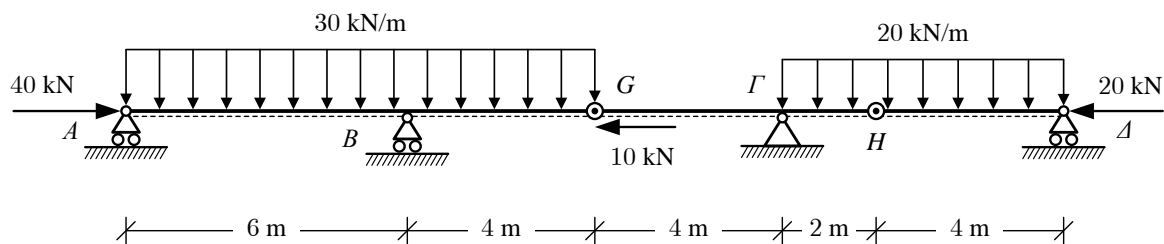
Η μέγιστη ροπή υπολογίζεται με βάση το εμβαδό του διαγράμματος της τέμνουσας:

$$M_{\max} = M_A + \text{εμβαδόν } Q \text{ από } A \text{ έως θέση } M_{\max} \Rightarrow$$

$$M_{\max} = -280 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 5.5 \text{ m} \cdot 110 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{M_{\max} = +22.5 \text{ kNm}}$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (40%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] της παρακάτω δοκού. Να υπολογισθούν οι τιμές και οι αντίστοιχες θέσεις της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης στα ανοίγματα  $AB$ ,  $BG$  και  $\Gamma\Delta$  (τρεις διαφορετικές τιμές).

**Λύση:**

Προσδιορισμός της αντίδρασης  $\Gamma_x$  στην άρθρωση  $\Gamma$ :

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 40 \text{ kN} - 10 \text{ kN} + \Gamma_x - 20 \text{ kN} = 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma_x = -10 \text{ kN}}$$

Προσδιορισμός της αντίδρασης στη κύλιση  $\Delta$ :

$$\curvearrowright \Sigma M_H^{\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}} = 0 \Rightarrow 4 \text{ m} \cdot \Delta - (20 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m}) \cdot 2 \text{ m} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta = 40 \text{ kN}}$$

Προσδιορισμός της αντίδρασης  $\Gamma_y$  στην άρθρωση  $\Gamma$ :

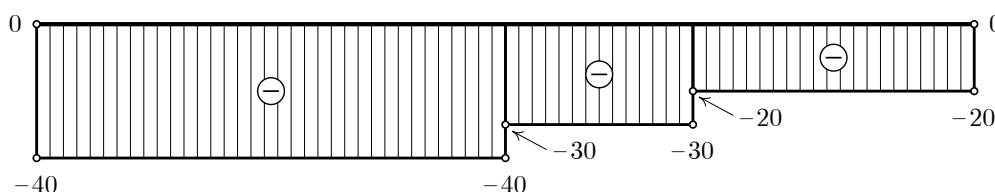
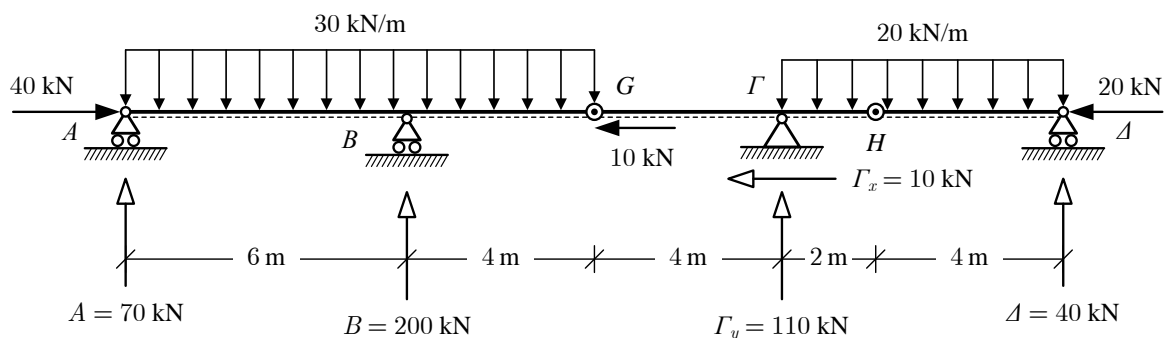
$$\begin{aligned} \curvearrowright \Sigma M_G^{\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}} = 0 &\Rightarrow 4 \text{ m} \cdot \Gamma_y + 10 \text{ m} \cdot \Delta - (20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 7 \text{ m} = 0 \\ &\Rightarrow 4 \text{ m} \cdot \Gamma_y + 10 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} - 840 \text{ kNm} = 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma_y = 110 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Προσδιορισμός της αντίδρασης στη κύλιση  $A$ :

$$\begin{aligned}\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 &\Rightarrow 6 \text{ m} \cdot B + 14 \text{ m} \cdot \Gamma + 20 \text{ m} \cdot \Delta - (30 \text{ kN/m} \cdot 10 \text{ m}) \cdot 5 \text{ m} \\ &\quad - (20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m}) \cdot 17 \text{ m} = 0 \\ &\Rightarrow 6 \cdot B + 14 \cdot 110 \text{ kN} + 20 \cdot 40 \text{ kN} - 1500 \text{ kN} - 2040 \text{ kN} = 0 \\ &\Rightarrow 6 \cdot B + 1540 \text{ kN} + 800 \text{ kN} - 3540 \text{ kN} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{B = 200 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Προσδιορισμός της αντίδρασης στη κύλιση  $A$ :

$$\begin{aligned}\Sigma F_y = 0 &\Rightarrow A + B + \Gamma_y + \Delta - 30 \text{ kN/m} \cdot 10 \text{ m} - 20 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} = 0 \\ &\Rightarrow A + 200 \text{ kN} + 110 \text{ kN} + 40 \text{ kN} - 300 \text{ kN} - 120 \text{ kN} = 0 \Rightarrow \boxed{A = 70 \text{ kN}}\end{aligned}$$



[N] (kN)

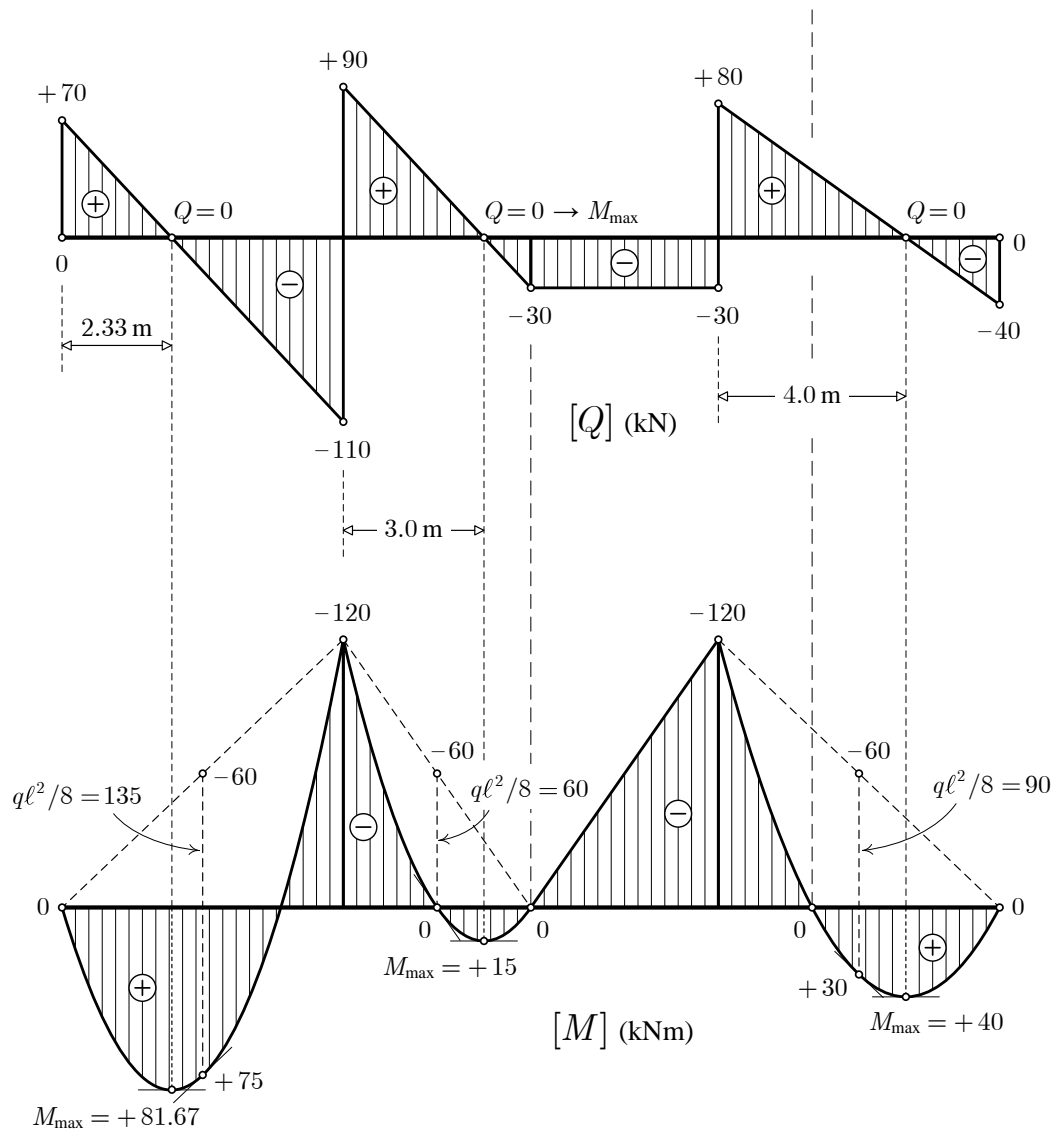
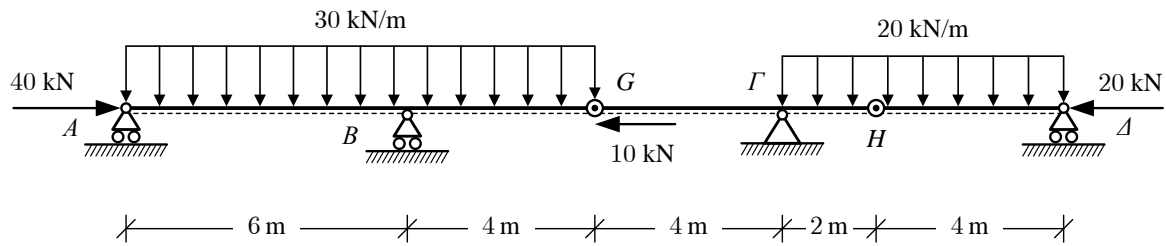
### Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Σύμφωνα με το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων που ακολουθεί, μέγιστες θετικές ροπές κάμψης θα εμφανισθούν στα ανοίγματα  $AB$ ,  $BG$  και  $\Gamma\Delta$ , εφόσον σε αυτά τα τμήματα του φορέα μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη. Η απόσταση  $x$  από το αριστερό άκρο κάθε τμήματος δίνεται από τις σχέσεις:

$$1. \text{ Τμήμα } AB: \quad x_1 = \frac{Q_A^{\delta\epsilon\zeta}}{30 \text{ kN/m}} = \frac{70 \text{ kN}}{30 \text{ kN/m}} \Rightarrow \boxed{x_1 = 2.33 \text{ m}}$$

2. Τμήμα BG:  $x_2 = \frac{Q_B^{\delta\epsilon\zeta}}{30 \text{ kN/m}} = \frac{90 \text{ kN}}{30 \text{ kN/m}} \Rightarrow \boxed{x_2 = 3 \text{ m}}$

3. Τμήμα ΓΔ:  $x_3 = \frac{Q_\Gamma^{\delta\epsilon\zeta}}{20 \text{ kN/m}} = \frac{80 \text{ kN}}{20 \text{ kN/m}} \Rightarrow \boxed{x_3 = 4 \text{ m}}$



Η μέγιστη ροπή για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις υπολογίζεται με βάση το αντίστοιχο εμβαδό του διαγράμματος της τέμνουσας:

1. Τμήμα  $AB$ :  $M_{\max}^1 = M_A + \text{εμβαδόν } Q \text{ από } A \text{ έως θέση } M_{\max} \Rightarrow$

$$M_{\max}^1 = 0 + \frac{1}{2} 2.33 \text{ m} \cdot Q_A^{\delta\epsilon\xi} \Rightarrow M_{\max}^1 = \frac{1}{2} 2.33 \text{ m} \cdot 70 \text{ kN} \Rightarrow$$

$$\boxed{M_{\max}^1 = +81.67 \text{ kNm}}$$

2. Τμήμα  $BG$ :  $M_{\max}^2 = M_B + \text{εμβαδόν } Q \text{ από } B \text{ έως θέση } M_{\max} \Rightarrow$

$$M_{\max}^2 = -120 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 3 \text{ m} \cdot Q_B^{\delta\epsilon\xi} \Rightarrow$$

$$M_{\max}^2 = -120 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 3 \text{ m} \cdot 90 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{M_{\max}^2 = +15 \text{ kNm}}$$

3. Τμήμα  $ΓΔ$ :  $M_{\max}^3 = M_{\Gamma} + \text{εμβαδόν } Q \text{ από } \Gamma \text{ έως θέση } M_{\max} \Rightarrow$

$$M_{\max}^3 = -120 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 4 \text{ m} \cdot Q_{\Gamma}^{\delta\epsilon\xi} \Rightarrow$$

$$M_{\max}^3 = -120 \text{ kNm} + \frac{1}{2} 4 \text{ m} \cdot 80 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{M_{\max}^3 = +40 \text{ kNm}}$$

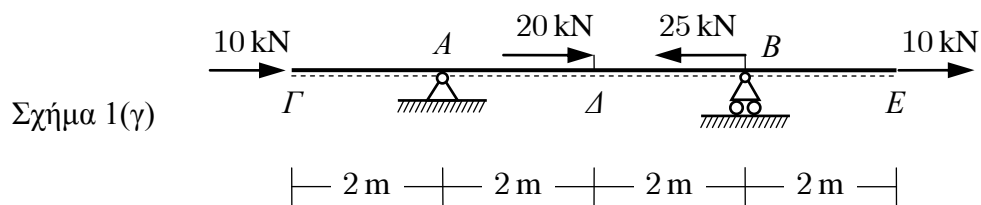
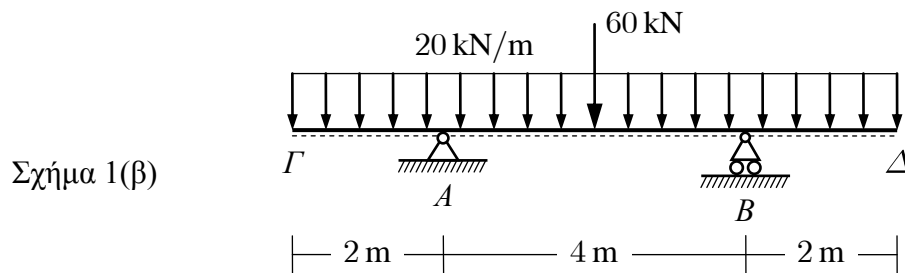
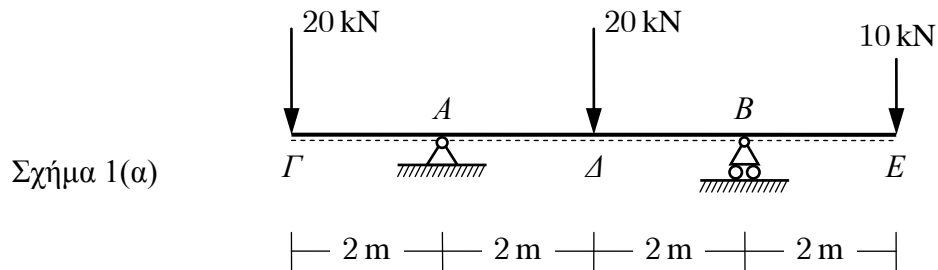
**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** (40%)

Για τις αμφιπροέχουσες δοκούς των παρακάτω σχημάτων, ζητούνται:

Σχήμα 1(α): Τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.

Σχήμα 1(β): Τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.

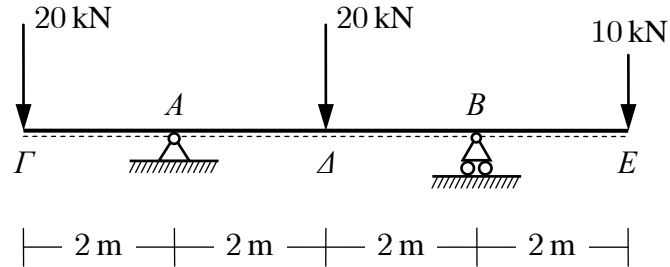
Σχήμα 1(γ): Το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα.



**Λύση:**

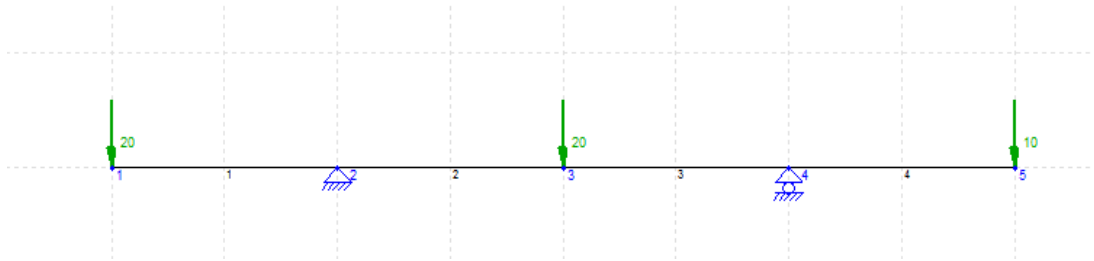
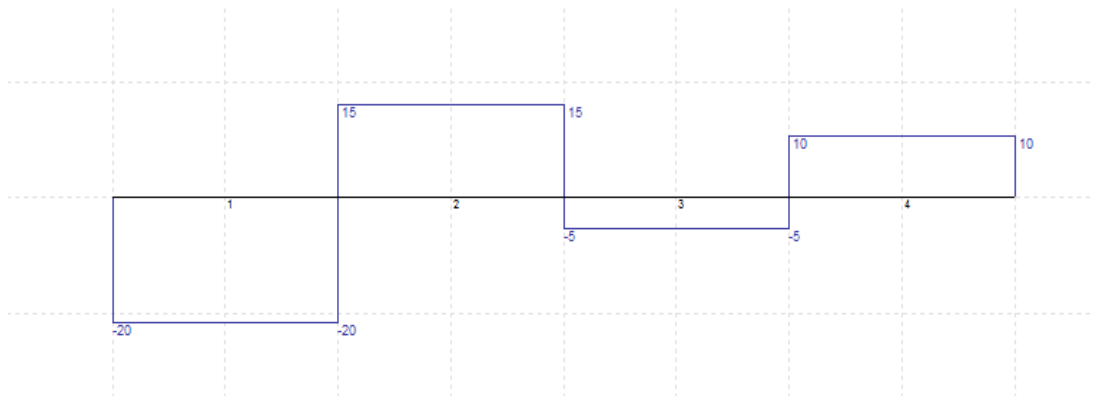
Για τις αμφιπροέχουσες δοκούς των παρακάτω σχημάτων, ζητούνται:

**Σχήμα 1(α):** Τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.



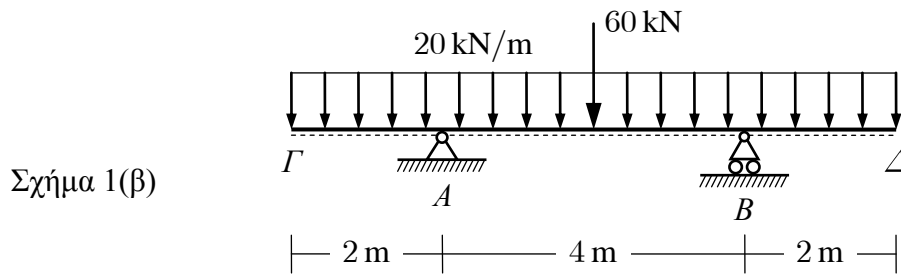
Σχήμα 1(α)

$$A_x = 0 \text{ kN}, A_y = 35 \text{ kN} \text{ και } B_y = 15 \text{ kN}$$

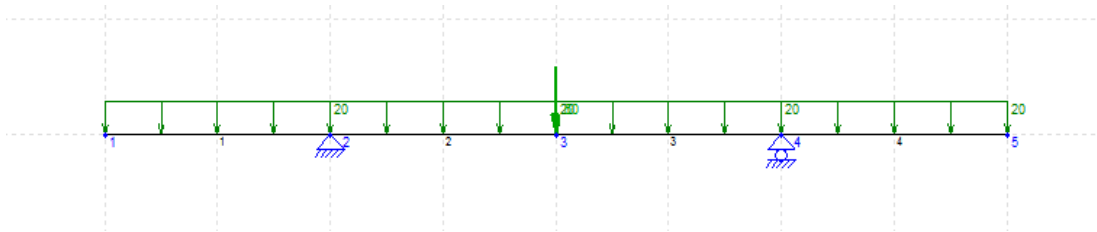
Διάγραμμα Τεμνουσών ΔυνάμεωνΔιάγραμμα Καμπτικών Ροπών



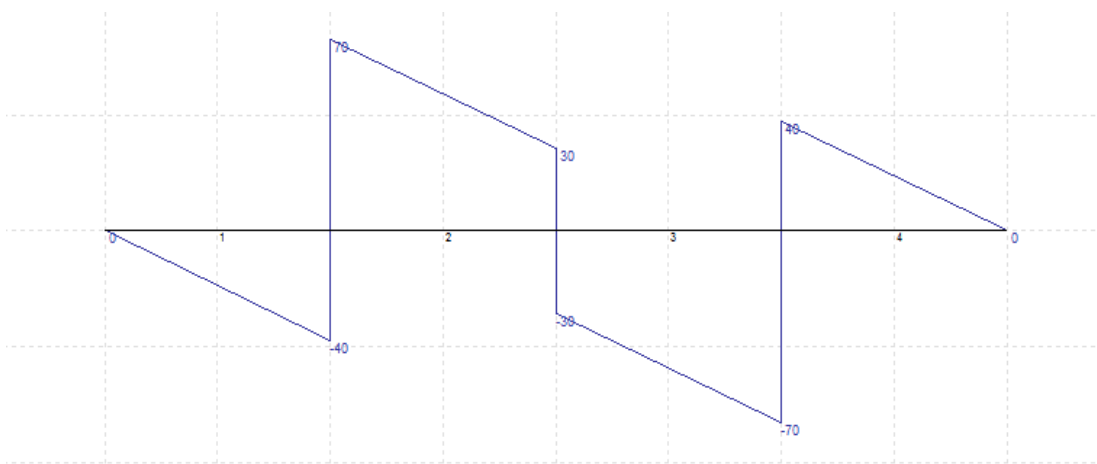
**Σχήμα 1(β):** Τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.



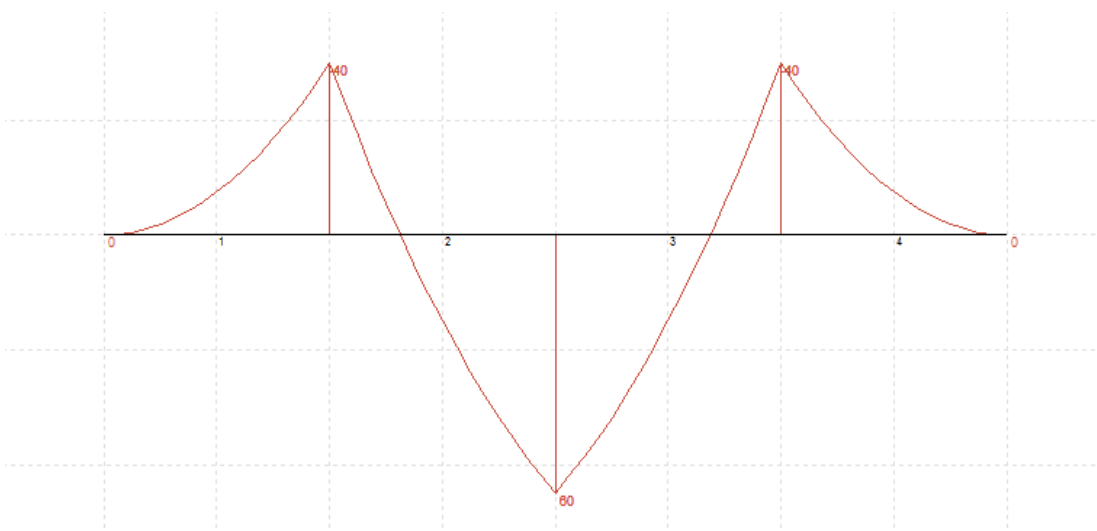
$A_x = 0 \text{ kN}$ ,  $A_y = 110 \text{ kN}$  και  $B_y = 110 \text{ kN}$



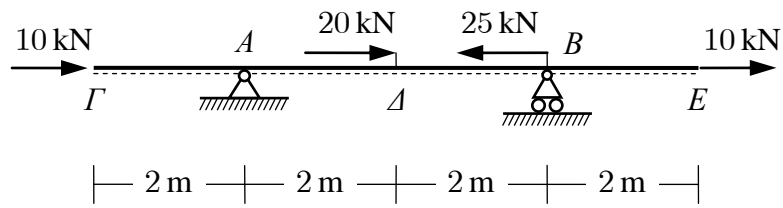
Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων



Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών



**Σχήμα 1(γ):** Το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων του φορέα.



Σχήμα 1(γ)

$A_x = -15 \text{ kN}$ ,  $A_y = 0 \text{ kN}$  και  $B_y = 0 \text{ kN}$

